数理解析研究所講究録
442巻 1981年 162-167

Graphs in Surfaces

相模工大　津久井　康之

n-manifold の triangulation をその (n-1)-skelton である (n-1)-simplicial complex でどの程度特徴づけられるか，という問題について $n=2$ の場合を考察する。

以下ではとくに断わらない限り，G は simple graph（1-dimensional simplicial complex）とし，G とその幾何的表現 $|G|$ とを混同する。F は closed 2-manifold で orientable なものに限っておく。

§1. Triangulation.

<u>Def.</u> $f: G \to F$ を embedding とするとき，$F - fG$ の各 connected component C に対し，

$\#\{e \in G \mid f(\mathring{e}) \cap \overline{C} \neq \phi\} + \#\{e \in G \mid f(\mathring{e}) \subset \mathrm{int}(\overline{C})\} = m$

のとき，C は m 辺形であるという。

<u>Def.</u> embedding $f: G \to F$ が triangulation である。

$\Longleftrightarrow$ $F - fG$ の全ての Component が三辺形である。

<u>Theorem 1.</u> $f: G \to F$ triangulation
$g: G \to F$ embedding
$\Longrightarrow$ g は triangulation

(証明) F の genus を p, $(fG \subset F)$ の 0-, 1-, 2- simplex の数を各々, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ とすると, $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0 - \frac{1}{3}\alpha_1 = 2-2p$.
$F - gG$ の component の数 $\#(F-gG) = \alpha_2'$ に対して, $F-gG$ の各 component が 2-disk でなければ vertices を増やさずに, edge のみを α_1' 個増やしてそれらを 2-disk とする, すると

$$\alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_1') + \alpha_2' = 2-2p .$$

$$\therefore \quad \alpha_2' = \alpha_2 + \alpha_1' \geqq \alpha_2 .$$

$F - gG$ の component A_i に対して $k(A_i)$: A_i が k 辺形.
$k'(A_i)$ を上の operation の後 $A_i \to \tilde{A}_i$ としたときの $\tilde{A}_i$ の辺の数とする (すなわち $k(\tilde{A}_i) = k'(A_i)$)。 $k' \geqq k \geqq 3$.

すると, $3\alpha_2' \leqq \sum_{i=1}^{\alpha_2'} k(A_i) \leqq \sum^{\alpha_2'} k'(A_i)$.

$$\sum k(A_i) + 2\alpha_1' = \sum k'(A_i)$$

$$\sum k'(A_i) = 2(\alpha_1 + \alpha_1') = 3\alpha_2 + 2\alpha_1'$$

より, $\alpha_2 \geqq \alpha_2'$. 従って $\alpha_1' = 0$. $k(A_i) = 3$ $\quad i=1,\cdots,\alpha_2 = \alpha_2'$.
故に $F-gG$ の各 component は 2-disk で 3 辺形であり, g も F の triangulation となる。

このことから, 「G が F の triangulation である。」($\Leftrightarrow$ ある triangulation $f: G \to F$ が存在する.) という表現が可能。

2.

Theorem 1 は graph G が 2-manifold F の triangulation になるかどうかは embedding に依らないことを示している。では G と F とが与えられたときその triangulation は一意であるかという問題が当然考えられる。この問題に対する肯定的なものが次の定理である。

<u>Theorem 2.</u> $f, g : G \to S^2$ triangulation

$$\Longrightarrow \exists H : S^2 \to S^2 \text{ homeomorphism}$$

$$\text{such that} \quad H \circ f = g$$

この Theorem の証明にはいくつかの方法があるが，他の場合との比較のために，G の vertices の数の induction によるものについて述べよう。S^2 の triangulation で vertices 最小のものは 3-simplex の境界で，$\alpha_0 = 4$．このとき定理は下の意味で成り立つ。

<u>Lemma</u> $\forall G$: simple graph, vertices の数 $\#V(G) \leq k$ $(k \geq 4)$

$\forall f : G \to S^2$, $\forall g : G \to S^2$: triangulation

$$\Longrightarrow \exists h : S^2 \to S^2 \text{ homeomorphism}$$

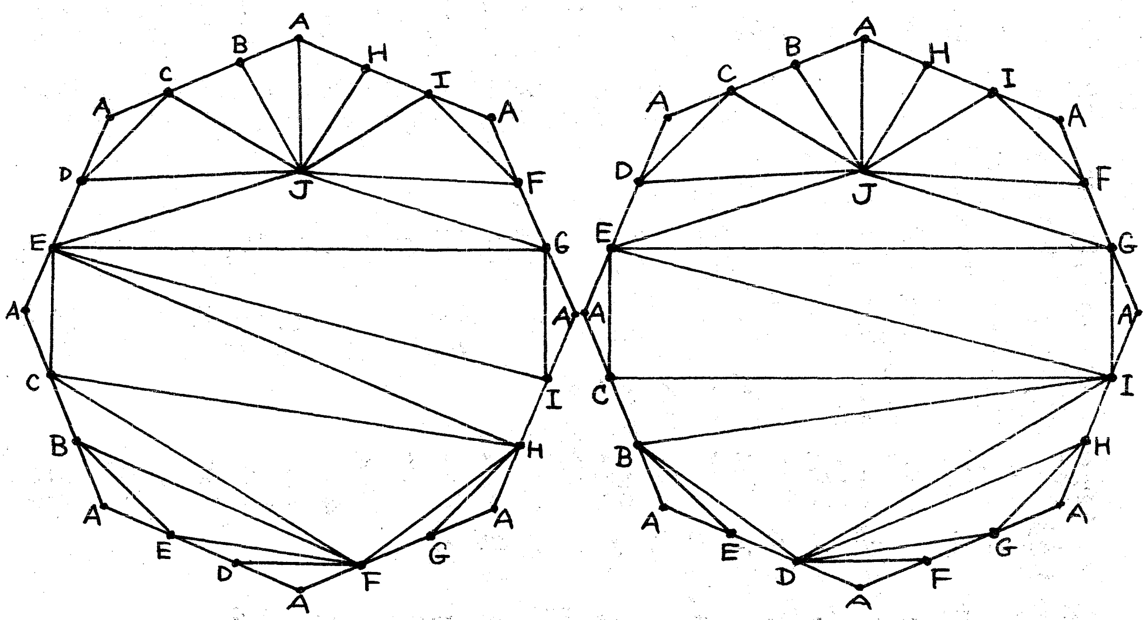
$$\text{such that} \quad h \circ f = g$$

（証明） 略．

<u>Ex 1.</u> 完全グラフ K_7 は $S^1 \times S^1$ の triangulation であり，Theorem 2 の意味では unique であるが，上の Lemma の

条件は満たしていない。

<u>Ex 2.</u> F_2 を genus 2 の orientable 2-manifold とし，次の図は F_2 へのある graph G の embedding (triangulation) を示す。



$fG \subset F_2$　　　　$gG \subset F_2$

F_2 の homeomorphism で fG を gG に写すものは存在しない。すなわち Theorem 2. の意味では上の 2つのものは「異なる」triangulation である。

<u>Remark.</u> 「triangulation」の定義をこれより弱めると（例えば simplex σ_1, σ_2 に対して $\sigma_1 \cap \sigma_1 = 2$つの vertices を許す）Theorem 1, 2 ともに成立しない example がある。

§2. Minimal and Maximal Triangulation

<u>Def.</u> F の triangulation graph で vertices の数の最小のも

のを minimal triangulation と呼ぶ。

genus p の closed surface の minimal triangulation の vertices の数は $\{(7+\sqrt{1+48p})/2\}$ ($p\neq 2$, $p=2$ のときは 10) で与えられることが知られている ($\{x\}$ は x 以上の最小の自然数)。 S^2 と $S^1\times S^1$ の minimal triangulation は (graph の意味で) unique である。

__Def.__ $f: G\to F$, $g: G_1\to F$ が共に F の triangulation であるとき, それらによって定まる simplicial complex を各々 $(fG\lhd F)$, $(gG_1\lhd F)$ と記す。
$(gG_1\lhd F)$ が $(fG\lhd F)$ の細分であるとき $g\prec f$ ($gG_1 \prec fG$ or) と書いて, f は g より大きいと呼ぶ。

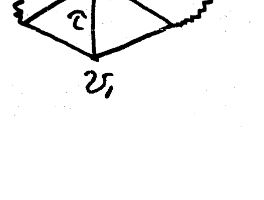
__Def.__ triangulation $f: G\to F$ が maximal である

$\Longleftrightarrow$ $g: G'\to F$ が $f\prec g$ なる triangulation ならば $f=g$.

定義からどんな surface F に対しても maximal triangulation が存在することは明らか。

__Theorem 3.__ S^2 の maximal triangulation は minimal triangulation である。

(証明) S^2 の任意の triangulation の任意の 1-simplex τ をとる ($\tau = v_0v_1$ とする)。 v_0 の star をとれば右図の arc A が simple path として存在することがわかる。(終証)



Conjecture 1. Maximal triangulation は minimal triangulation であろう。

Remark. ex 2.1は genus 2 の surface の minimal triangulation が graph そのもの（の同型）では決まらず，embedding に関係すること，minimal triangulation が unique でないことを示している。

§3. High-dimensional case.

§§1, 2 の定義を一般次元の simplicial complex まで拡張すれば manifold（またはその triangulation）を1次元低い単体的複体の構造からながめる立場が作られる。

Problem. triangulation $f: K^{n-1} \to M^n$ に対して Theorem 1, 2の問題を考えよ。

theorem 3 に対しては;

Conjecture 2. S^n の maximal triangulation は minimal.

本講演の前後に，根上氏（東工大）および特に名を秘すA氏より Graph 関係の情報について御教示いただいたことに対して謝意を表明いたします。

以上.